

LE STATUT DE LA LETTRE

1. Contexte

L'apprentissage de l'algèbre met en jeu un ensemble d'objets permettant de résoudre des problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation ou encore de preuve dans des contextes intra ou extra-mathématiques (Grugeon-Allys, 2016). Elle occupe donc un enjeu majeur pour la suite de l'apprentissage en mathématiques. Néanmoins, elle implique de nombreuses difficultés d'enseignement et d'apprentissage (Bombrun-Nigon & Coppé, 2014 ; Demonty & Vlassis, 2018).

2. Définition : Les différents statuts de la lettre

Au fur et à mesure de l'enseignement des mathématiques, différents statuts sont accordés à la lettre. A l'école élémentaire, la lettre possède le statut d'**étiquette**. En effet, elle est utilisée pour symboliser des unités (h, m...), pour désigner un objet précis (un point A, le nombre π ...) ou encore pour désigner une grandeur ou une mesure dans une formule.

Dès l'enseignement secondaire, la lettre acquiert de nouveaux statuts, restant souvent implicites pour l'élève et qui varient en fonction de la tâche qui lui sera demandée. Au sein de certaines activités proposées, les lettres peuvent même combiner plusieurs statuts :

- le statut de **variable** quand elle est utilisée pour produire une formule ;
- le statut d'**inconnue** quand elle est utilisée pour résoudre un problème ;
- le statut d'**indéterminée** lorsqu'elle revêt un caractère universel (Exemple : écriture d'identités telles que « $a + (b + c) = (a + b) + c$ ») ;
- le statut de **paramètre**, bien que ce soit plus rare au premier degré, quand elle représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres ayant d'autres statuts (Exemple : Lorsqu'on annonce les formes d'équations du premier degré telles que « $ax + b = c$ »).

3. Les obstacles liés à l'introduction de la lettre

- Donner le statut adapté à la lettre et le dépasser

Comme susmentionné, il semble exister un décalage entre le statut accordé à la lettre au cours de l'enseignement primaire et celui accordé au cours de l'enseignement secondaire (Direction de l'enseignement scolaire, 2008). Un des premiers enjeux réside dans le fait de dépasser le statut de lettre-étiquette, accordé en primaire, qui est problématique pour l'entrée dans l'algèbre (Hinault & Chenevotot, 2012). Un autre enjeu pour l'apprentissage est que les élèves sachent distinguer en situation les rôles différents joués par les lettres, sans nécessairement faire de la dénomination des différents statuts un objet d'enseignement. Autrement dit, il est essentiel que les élèves puissent interpréter le sens des lettres utilisées en dépassant leur représentation, perçues initialement comme des labels (Vlassis & Demonty, 1997). Faire preuve d'**inhibition** par rapport au sens de la lettre accordé en primaire et de **flexibilité** pour être capable d'agir selon les différents statuts accordés

apparaît donc nécessaire. Du côté du travail de l'enseignant, il est donc nécessaire de disposer d'exercices permettant de diagnostiquer les statuts accordés par les élèves et d'y remédier si nécessaire (Hinault & Chenevotot, 2012). Kieran (1992, cité par Pilet, 2012) a d'ailleurs identifié les différents statuts donnés aux lettres par les apprenants, certains étant similaires à ceux cités précédemment, et le tableau suivant reprend la liste de ces statuts.

Tableau 1 : Statuts de la lettre accordés par les enfants (Kieren, 1992, cité par Pilet, 2012)

La lettre évaluée	La lettre est assimilée à une valeur numérique dès le début
La lettre non prise en considération	La lettre est ignorée ou aucun sens n'est donné à sa présence
La lettre représentant un objet concret	La lettre est considérée comme l'abréviation d'un objet concret
La lettre représentant une inconnue	La lettre est considérée comme un nombre particulier mais inconnu
La lettre représentant un nombre généralisé	La lettre est considérée comme un représentant de plusieurs valeurs
La lettre représentant une variable	La lettre est considérée comme un représentant d'un ensemble de valeurs non spécifiées et il existe une relation systématique entre deux tels ensembles de valeurs.

- Passer d'une démarche arithmétique à une démarche algébrique

D'après Vergnault (1988, cité par Alves et al., 2013), le passage de l'arithmétique à l'algèbre constitue une rupture. Pour passer d'une démarche contenant uniquement du calcul numérique et une démarche intégrant du calcul algébrique, il est nécessaire de passer par une remise en cause profonde des stratégies de résolution utilisées (Direction de l'enseignement scolaire, 2008 ; Bombrun Nigon & Coppé, 2014, p. 11). D'une part parce que le sens du raisonnement varie en n'allant plus systématiquement du connu vers l'inconnu. En effet, en algèbre, on peut accepter de faire des calculs avec de l'inconnu, par exemple dans la résolution d'équations, ce qui n'est pas le cas en arithmétique (Hinault & Chenevotot, 2012). D'autre part parce que la maîtrise de la structure des expressions littérales devient indispensable, alors qu'aucune connaissance de ce type n'est nécessaire auparavant puisque c'est la langue naturelle qui était principalement utilisée pour pouvoir décrire les démarches et formuler les réponses. Les élèves font donc face à « *des jeux de changement de registres sémiotiques* » (Bombrun Nigon & Coppé, 2014, p. 11). En outre, en algèbre, on travaille sur des objets similaires à l'arithmétique (opération, signe d'égalité, chiffre ...) mais l'utilisation qui est faite de ces objets est parfois modifiée (Alves et al., 2013). Nous assistons par exemple à une remise en cause du statut du signe d'égalité puisque l'égalité jusque-là installée sous-entendait le vrai et n'était pas systématiquement perçue comme symétrique (Direction de l'enseignement scolaire, 2008 ; Académie de Limoges, s.d.). Il y a donc une opposition entre le signe d'égalité utilisé jusque-là en temps qu'annonceur de résultats et celui

utilisé pour présenter une équivalence (Grugeon-Allys, 2016). Avec le passage de l'arithmétique à l'algèbre, l'inhibition et la flexibilité semblent être des fonctions cognitives à développer.

- La considération d'une expression littérale en tant que nombre

La prise de conscience du fait qu'au-delà de traduire un programme de calcul, les expressions algébriques sont utilisées aussi pour décrire des nombres, apparaît également problématique. En effet, deux points de vue peuvent être utilisés pour considérer une même expression algébrique, l'aspect « procédural » consistant à envisager l'expression comme un ensemble d'opérations à réaliser sur un nombre et l'aspect « structural » considérant l'expression comme le moyen de caractériser la forme générale d'un nombre. Bien souvent, les élèves ont des difficultés à distinguer ces aspects puisque dans l'enseignement, le second aspect est écrasé par le premier (Direction de l'enseignement scolaire, 2008 ; Bombrun Nigon & Coppé, 2014). L'un des obstacles conceptuels à l'association d'une expression littérale à un nombre réside dans la présence de signes opératoires visibles. Ainsi, il apparaîtra difficile pour un apprenant de considérer par exemple l'expression « $7a + 3b$ » comme un nombre (Vlassis & Demonty, 1997).

- La considération de l'algèbre en tant qu'outil

Enfin, si l'enseignement de l'algèbre est introduit en secondaire, c'est notamment pour apprendre aux élèves à résoudre des problèmes, à généraliser ou encore à démontrer. L'algèbre possède ainsi une dimension d'outil (Barallobres, 2004 ; Alves et al., 2013). Or, d'après Alves et al. (2013), ce sont le plus souvent comme des objets et non comme des outils que les notions algébriques sont enseignées ce qui est problématique puisque cela dénie l'apprentissage de sens. Une des difficultés rencontrées dans la démarche de démonstration réside dans le fait que les élèves considèrent que des essais concluants suffisent puisqu'il n'y a pas de contre-exemple identifié. Ils ont donc des difficultés à percevoir l'introduction des expressions littérales (Bombrun Nigon & Coppé, 2014).

4. Pistes et applications

Une des premières pistes pouvant être envisagée pour que les élèves parviennent à dépasser le statut de la lettre en tant qu'objet est de montrer la réelle utilité des expressions littérales en l'utilisant pour démontrer une propriété, pour réaliser une preuve ou pour généraliser une propriété. Il est dès lors par exemple possible de proposer, au départ, une situation de dénombrement ou encore de preuve avec l'utilisation de tours de « magie ». En effet, des mises en situation centrée sur la preuve de certains tours de magie placent les élèves dans une situation ludique au sein de laquelle ils doivent tenter d'expliquer des phénomènes numériques. Par le recours au symbolisme, cette explication est rendue plus aisée ce qui permet d'entamer le formalisme algébrique (CREM, 2004). Divers exemples sont d'ailleurs proposés notamment par le CREM (2004)¹.

Une seconde piste consiste à prendre le temps de s'interroger avec les étudiants sur le produit attendu des activités proposées : quel statut de la lettre perçoit l'élève ? Qu'est-il attendu de lui

¹ <https://www.crem.be/publication/Culture%20math>

concrètement ? Cette piste peut se faire oralement avec les étudiants en vue de s'assurer que chacun d'entre eux comprenne bien le sens de l'activité.

Une troisième piste pouvant être exploitée est la place accordée à l'erreur dans les apprentissages des élèves (Swan, 2005). L'auteur incite à provoquer et exploiter les erreurs commises par les apprenants car, selon lui, elles résultent de raisonnements différents et réfléchis. Bien entendu, il ne parle pas des erreurs de distraction ou bien encore de raisonnement hâtif. Il préconise donc d'analyser les erreurs, d'essayer de les comprendre en vue de ne plus les répéter. L'utilisation du logiciel « Thot », proposé par Emmanuel Morand, prend alors tout son sens. En effet, ce dernier résout les équations en suivant scrupuleusement les démarches émises par les élèves, leur permettant ainsi de se concentrer uniquement sur la méthode de résolution d'une équation et non sur les calculs. De la sorte, les étudiants sont guidés par leur instinct, leur esprit logique et s'approprient la technique à leur rythme (Académie de Versailles, s.d.).

Enfin, Vlassis et Demonty (2002) attirent l'attention des enseignants quant au vocabulaire utilisé lors de l'apprentissage de l'algèbre tel que « changer le terme de membre » lors de la résolution d'une équation. Un autre exemple illustrant l'importance du vocabulaire utilisé en classe est le fait de justifier la somme des termes semblables par « on ne peut pas additionner des pommes et des poires ». Le professeur ne permet pas à l'élève de dépasser l'étiquette objet qu'est attribué à la lettre dans l'enseignement primaire. De plus, ce raisonnement n'a aucun sens lorsque les coefficients des expressions littérales sont des nombres entiers négatifs.

Bibliographie

- Académie de Limoges. (s. d.). *Du calcul numérique au calcul littéral*. Consulté à l'adresse http://pedagogie.ac-limoges.fr/math/IMG/ppt/alelier_calcul_litt.ppt.
- Académie de Versailles. (s.d.). THOT, Logiciel pour aider les élèves à résoudre une équation du premier degré de type $ax+b=cx+d$. Accessible au lien https://eed.ac-versailles.fr/IMG/pdf/Introduction_a_Thot.pdf
- Alves, C., Coppe, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92, 9-30.
- Barallobres G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24,2-3,285-328.
- Bombrun-Nigon, C. & Coppé, S. (2014). La « preuve pour comprendre », un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième. *Repères IREM*, 9-30.
- CREM (2004). Pour une culture mathématique accessible à tous. Rapport de fin de recherche. Consulté à l'adresse <https://www.crem.be/publication/Culture%20math>
- Demonty, I. & Vlassis, J. (2018). L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre : Comment penser la progression des apprentissages numériques entre 10 et 14 ans. *Losange*, 43, 37-55.
- Direction de l'enseignement scolaire. (2008). *Du numérique au littéral - Projet de document d'accompagnement*. Consulté à l'adresse https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf.
- Grugeon-Allys, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle. Evaluer. *Journal international de Recherche en Education et Formation*, 2(2), pp. 63-88.
- Hinault, M.-H. & Chenevotot, F. (2012). Entretiens individuels en calcul algébrique. *Repères IREM*, 89, 57-87.
- Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* (Thèse de doctorat). Université Paris-Diderot - Paris VII.
- Swan, M. (2005). *Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies*. Nottingham: University of Nottingham. Consulté à l'adresse <https://www.stem.org.uk/elibrary/resource/26057>
- Vlassis, J. & Demonty, I. (1997). *Processus de raisonnement et enseignement de l'algèbre au premier degré du secondaire. Synthèse de la phase 1996-1997 de la recherche en pédagogie*. Consulté à l'adresse <http://www.restode.cfwb.be/download/infoped/INFO38C.pdf>
- Vlassis, J. & Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire*. Bruxelles : De Boeck.