UMONS
Université de Mons

# LE SIGNE MOINS

## 1. Contexte

Travailler avec le signe “-” constitue une difficulté pour un grand nombre d’apprenants. Il a d’ailleurs été observé que certains élèves avaient le réflexe d’occulter sa présence (Job, Licot, Rosseel, Schneider, 2012). Dès lors, enseigner les nombres relatifs au début du secondaire, avec l’introduction des nombres négatifs, apparaît complexe (Groupe Didactique des Mathématiques IREM d’Aquitaine, 2008). C’est également le cas de l’enseignement de l’opération de soustraction, représentée par le signe moins, qui voit naître certaines difficultés fondamentales chez les apprenants (Berlanger, Cuisinier, Gilbert & Ninove, 2013). Cette fiche a donc pour ambition de présenter l’obstacle lié à la gestion du signe moins.

## 2. Définition : Les fonctions du signe moins

En mathématiques, le signe « - » est utilisé de manière multifonctionnelle (Vlassis, 2013, Groupe Didactique des Mathématiques IREM d’Aquitaine, 2008). Pour Clairaut (1749), il y a par exemple une nuance entre le signe d’un nombre et celui utilisé dans les opérations de soustraction. Il apparait donc important de clarifier chacune des fonctions que peut prendre ce signe. Vlassis (2013) identifie trois fonctions au signe « - » : la fonction unaire, la fonction binaire et enfin la fonction symétrique.

- Le signe « - » à une fonction unaire lorsque le signe est attaché au nombre et qu’il a une valeur prédictive des nombres négatifs. C’est le cas par exemple lorsqu’on présente les nombres,”**-**2”, “-10”,...
- Il est également utilisé pour représenter l’opération de soustraction ce qui lui confère donc la fonction binaire. C’est cette fonction qui est donc observée dans l’expression “5**-**3”.
- Enfin, une fonction symétrique lui est également associé lorsqu’il est utilisé pour désigner l’opposé. Ainsi, dans l’expression “-a” ou encore dans l’expression “-(x+2)”, il est utilisé pour annoncer respectivement l’opposé de “a”et celui de “x+2”.

## 3. Les obstacles liés au signe moins

Tout au long de l’enseignement primaire, le signe « - » se voit uniquement attribuer la fonction binaire, qui est présentée de manière concrète comme l’action de retrait. Néanmoins, l’utilisation de ce signe devient nettement plus abstraite dès l’enseignement secondaire, avec l’introduction notamment des nombres entiers, parce que son utilisation se diversifie avec l’apparition des deux autres fonctions (Vlassis, 2010). Cette utilisation multiple du signe peut être à l'origine de difficultés pour les élèves, manquants de **flexibilité**[1] dans son utilisation (Vlassis, 2013). A ce sujet, on peut par exemple identifier des difficultés pour les élèves à envisager d'autres fonctions que la fonction d'opération lorsqu'ils font face au signe moins. Cette dominance est explicable par les habitudes arithmétiques prises par les élèves au cours de l'enseignement primaire, avant la découverte des nombres négatifs, où le signe est utilisé principalement comme signe d'opération (Vlassis, 2013 ; Bellamy, 2015). Une autre illustration résultant de ce manque de flexibilité réside par exemple dans la complexité à concevoir les nombres opposés comme pouvant être positifs. Autrement dit, de ne pas envisager "-a", l'opposé de a, comme un nombre pouvant être positif.

Par ailleurs, au-delà de ces difficultés liées à des confusions des différentes fonctions du signe, plusieurs difficultés liées au signe et à ses fonctions ont été identifiées :

- Un obstacle réside chez les élèves dans le fait de concevoir le nombre négatif en tant que nombre. Si la notion de nombre négatif est familière aux élèves par le fait qu'ils les rencontrent dans leur environnement proche comme par exemple avec les températures ou encore en Histoire, il est impératif de pouvoir donner du sens à des nombres négatifs afin de pouvoir les manipuler (Groupe Didactique des Mathématiques IREM d'Aquitaine, 2008).
  Par ailleurs, le Groupe Didactique des Mathématiques IREM d'Aquitaine (2008) souligne, en prenant appui sur les dire de Carnot, que concevoir qu'il existe quelque chose en dessous du zéro absolu est aussi un obstacle pour certains élèves. Job et al. (2012) identifient d'ailleurs que certains élèves ont des difficultés à accepter des solutions négatives.
- L'appréhension de certaines règles se rapportant aux opérations sur les nombres négatifs semble également poser problème. Selon Berlanger et al. (2013), les élèves éprouvent également des difficultés lorsqu'il s'agit de soustraire un nombre négatif. Comprendre que cela revient à ajouter son opposé semble en effet poser problème aux apprenants. La règle de multiplication de deux nombres négatifs engendre elle aussi un grand nombre de difficultés. Cette règle qui indique que le produit de deux nombres négatifs est positif heurte le bon sens de beaucoup d'élèves (Groupe Didactique des Mathématiques IREM d'Aquitaine, 2008). Pour Job et al. (2012) certaines erreurs comme celle liée à la multiplication sont liées à la présence d'un contrat didactique consistant à penser que la présence de deux signes "-" implique d'en conserver un.
  Par ailleurs, une difficulté réside dans l'impossibilité de trouver un modèle concret qui permet d'unir à la fois les opérations de l'addition et celle de la multiplication lorsqu'on travaille avec des nombres entiers.

[1] Une fiche portant sur la flexibilité cognitive est mise à disposition.

## 4. Pistes et applications

Si diverses pistes sont proposées pour enseigner les nombres négatifs, elles provoquent débat entre chercheurs notamment parce qu'elles ne permettent que d'expliquer certaines propriétés (Vlassis, 2010). Cela rejoint d'ailleurs l'obstacle susmentionné relatif à l'inexistence d'un modèle permettant d'unir l'opération d'addition et celle de multiplication. Le groupe Didactique des Mathématiques (2008) confirme cette idée puisqu'il annonce que dans ce contexte "*aucun mode d'introduction ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés*" (p.63).

En ce qui concerne les pistes pédagogiques pour la découverte des nombres négatifs ainsi que pour leur addition et soustraction, il est possible de citer le modèle concret sous la forme « gain-dette » ou encore « le repérage sur une droite et des déplacements sur la graduation » (Berlanger et al, 2013 ; Groupe Didactique des Mathématiques, 2008 ; Beswick, 2011). Goislard (2012) propose par exemple de partir du contexte d'un jeu de vidéo dans lequel on étudie les gains et pertes de points, qui est un contexte connu et facilement exploitable par les élèves. Toutefois, ces pistes peuvent entraîner des obstacles pour l'enseignement de la multiplication, et notamment lorsqu'il s'agit de concevoir la multiplication de deux négatifs (Job et al., 2012 ; Groupe Didactique des Mathématiques, 2008). En effet, l'image mentale « monter-descendre » ou encore « avancer-reculer » ou même "gagner-perdre" peut être un obstacle à la multiplication.

Une autre piste pouvant permettre de découvrir les nombres négatifs est, selon le Groupe Didactique des Mathématiques (2008), de partir d'une série d'égalités à compléter, comme proposé ci-dessous. Le choix est donc d'introduire les nombres négatifs par une situation interne aux mathématiques, ce qui d'après les auteurs, n'a pas été problématique : "*Nous pensons que nos élèves sont capables de comprendre que des nombres sont des concepts abstraits, qu'ils ont des propriétés définies à l'intérieur des mathématiques, indépendamment de leur interprétation dans un modèle concret quelconque*" (p.71).

12 + …. = 27
38 + …. = 83
438 + … = 705
58 + … = 58
9 + … = 7

*Figure 1 : Illustration de l'introduction des nombres négatifs par une situation interne aux mathématiques*

Une piste envisagée par Freudenthal (1973, cité par Job et al., 2012) pour découvrir les opérations sur les entiers, tout en restant dans le contexte mathématique, est de s'appuyer sur la méthode "inductive-exploratoire" consistant à observer les régularités dans les opérations avec les naturels pour ainsi en déduire les règles dans les négatifs. Ainsi grâce à la suite des calculs : “3−2 = 1 ; 3−1 = 2 ; 3−0 = 3 ; 3−(−1) = 4”, il est possible de déduire la règle de soustraction d’un négatif. Dans la même idée, Berlanger et al. (2013) évoquent l’idée de remplir un tableau à double entrées comme celui proposé ci-dessous, en partant du connu (calcul dans les nombres naturels) pour ainsi observer les régularités et découvrir les règles dans les entiers comme la règle de soustraction d’entiers.

| $\nearrow$ $-$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3$ | | | | | | | |
| $2$ | | | | | | | |
| $1$ | | | | | | | |
| $0$ | | | | | | | |
| $-1$ | | | | | | | |
| $-2$ | | | | | | | |
| $-3$ | | | | | | | |

*Figure 2 : Illustration d’un tableau à double entrées pour les règles d’opérations d’entiers (Berlanger et al., 2013)*

Il pourrait être envisagé d’appliquer la même démarche pour découvrir la multiplication de nombres entiers. Si, selon Berlanger et al. (2013), le tableau prolongé dans les deux sens est une bonne manière de découvrir la règle et de convaincre l’élève de la règle, la limite de cette méthode est néanmoins qu’elle n’est pas rapidement retrouvée en cas de besoin. “*Son intérêt se situe surtout dans les questions et commentaires assez riches qu’il suscite lors d’une première analyse*” (p. 9). Par ailleurs, ce type de démarche ne semble pas forcément attribuer du sens à la soustraction ni aux négatifs, à l’inverse des approches de type “gain / perte”. En outre, cette méthode implique la nécessité d’avoir découvert préalablement ce que sont les nombres négatifs.

D’autres auteurs, à l’instar de Job et al. (2012) proposent une situation intégrant la physique et plus particulièrement les mouvements rectilignes uniformes, ce qui permet le recours à des grandeurs qui peuvent être associée au quotidien à une valeur négative. Néanmoins, la notion de vitesse constante, autrement dit le rapport entre un espace parcouru et une durée, apparaît comme un prérequis.

## Bibliographie

Bellamy, A. (2015). A critical analysis of teaching and learning negative numbers. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 29*.

Berlanger, Cuisinier, Gilbert & Ninove (2013). Quelques difficultés liées à la soustraction : Partie 2. *Losanges, 20*, 3-15.

Beswick, K. (2011). Positive Experiences with Negative Numbers: Building on Students in and out of School Experiences. *Australian Mathematics Teacher, 6*(2), 31-40.

Clairaut, C.- A., (1749). *Eléments d'algèbre*. Paris. Durand.

Freudenthal H. (1973). *Mathemactis as an educational task.* D.  Dordrecht : Reidel.

Goislard, A. (2012) Introduction des opérations sur les nombres relatifs en classe de cinquième : une nouvelle signification pour les signes « + » et « - ». Dans Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1569–1582). Consulté à l'adresse http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Groupe Didactique des Mathématiques IREM d'Aquitaine. (2008). Enseigner les nombres relatifs aux collèges. *Repères IREM, 73*, 59-72.

Job, P., Licot, A.-Fr., Rosseel, H. & Schneider, M. (2012). *Comment donner du sens aux nombres relatifs et à leurs opérations grâce à un contexte "concret".* Communication présentée au congrès SBPM, Liège. Consulté à l'adresse : https://orbi.uliege.be › bitstream › RelatifsLosanges

Vlassis, J. (2010). *Sens et symboles en mathématiques*. Berne, Suisses : Editions scientifiques internationales.

Vlassis, J. (2013). Utilisation du signe négatif et activités de modélisation. *Education & Formation, 298*, 01, 39-50.